BILINEÁRNÍ FORMY

$\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$\beta(u+v, w) = \beta(u, w) + \beta(v, w)$

$\beta(a\, u, v) = a\, \beta(u, v)$

B ... čtvercová matice $n \times n$

$(x^1 \dots x^n)\, B \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$

β ... bilin. forma

$e_1, \dots, e_n$ báze

$B_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

β, $e_1, \dots, e_n$ stará báze

$e'_1, \dots, e'_n$ nová báze

Q ... matice přechodu

B, B' matice β vzhledem ke staré, resp. nové bázi

$$B' = Q^T B Q$$

Symetrická bilin. forma $\beta(u, v) = \beta(v, u)$

KVADRATICKÉ FORMY

$\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ bilin. forma symetrická

$\bar{\beta}: V \to \mathbb{R}$, $\bar{\beta}(v) = \beta(v,v)$ se nazývá

KVADRATICKÁ FORMA příslušná β a β se nazývá POLARIZACE kv. formy.

Př. β – skalární součin

$$\|v\|^2 = \beta(v,v)$$

Tvrzení Každá kvadr. forma má právě jednu polarizaci.

Důkaz

$$\bar{\beta}(u+v) = \beta(u+v, u+v) = \beta(u,u) + \beta(u,v) + \beta(v,u) +$$
$$+ \beta(v,v) = \bar{\beta}(u) + 2\beta(u,v) + \bar{\beta}(v)$$
$$\beta(u,v) = \frac{1}{2}\left(\bar{\beta}(u+v) - \bar{\beta}(u) - \bar{\beta}(v)\right)$$

Př.: $$\bar{\beta}(x^1, x^2) = a\cdot(x^1)^2 + b x^1 x^2 + c(x^2)^2$$

$$\beta((x^1,x^2),(y^1,y^2)) = a x^1 y^1 + \frac{1}{2} b x^1 y^2 + \frac{1}{2} b y^1 x^2 + c x^2 y^2$$

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$$\beta(e_1,e_1) = \beta((1,0),(1,0)) = a = B_{11}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$$

KANONICKÉ TVARY

Tvrzení Každá reálná symetrická matice je kongruentní s diagonální maticí, jejíž diagon. prvky jsou $0, 1, -1$.

Důkaz Provádíme elementární řádkové úpravy

$$B \ldots P_1 B$$

a také stejné sloupcové úpravy

$$P_1 B \ldots P_1 B P_1^T$$

$$\vdots$$

$$P_k \cdots P_1 B P_1^T \cdots P_k^T =$$

$$= P_k \cdots P_1 B (P_k \cdots P_1)^T \text{ je}$$

kongruentní s B $\left(Q = (P_k \cdots P_1)^T \right)$.

Př.:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \underset{\cdot \frac{1}{\sqrt{|-\frac{4}{5}|}}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonální matice z předchozího tvrzení se nazývá KANONICKÝ TVAR SYMETRICKÉ MATICE VZHLEDEM KE KONGRUENTNOSTI.

Důsledek $\beta \ldots$ symetrická bilin. forma na V. Pak existuje báze V tak, že matice formy β je v kanonickém tvaru.

<u>Sylvesterův zákon setrvačnosti:</u>

β ... bilin. symetrická forma

B ... diagonální matice β vzhledem k nějaké bázi

Pak počet nulových, kladných a záporných prvků na diagonále nezávisí na volbě báze.

KLADNĚ DEFINITNÍ FORMY A MATICE

Symetrická bilin. forma β na V se nazývá KLADNĚ DEFINITNÍ, když $\forall\, v \in V \setminus \{0\}$ platí $\beta(v,v) > 0$.

B ... symetr. matice

$$\varphi_B(x,y) = \sum_{i,j} B_{ij} x^i y^j \quad \text{... sym. bil. forma}$$

Symetrická matice B je KLADNĚ DEFINITNÍ, když φ_B je kladně definitní.

<u>Tvrzení</u> Symetrická bilin. forma je kladně definitní <=> existuje báze, v níž má jednotkovou matici.

<u>Tvrzení</u> Symetrická reálná čtvercová matice B typu $n \times n$ je kladně definitní <=> platí $D_1 > 0, \dots, D_n > 0$, kde D_i je subdeterminant tvořený prvními i řádky a prvními i sloupci matice B.